A EXPLORAÇÃO DE ATIVIDADES MATEMÁTICAS POR MEIO DE PADRÕES GEOMÉTRICOS

The exploration of mathematical activities by geometric patterns

Ayrton Góes de Magalhães [Ayrton.magalhaes@universo.univates.br]
Wolmir José Böckel [wjbockel@universo.univates.br]
Márcia Jussara Hepp Rehfeldt [mrehfeld@univates.br]

Universidade do Vale do Taquari
Rua Avelino Talini, 171 - Bairro Universitário, Lajeado/RS - Brasil

Recebido em: 05/02/2019 Aceito em: 11/09/2019

Resumo

As atividades descritas neste artigo foram realizadas com alunos do Ensino Fundamental em uma escola localizada no município de Santana, Estado do Amapá. O objetivo consistiu em explorar atividades com padrões geométricos. Entende-se que, por meio deles, é possível iniciar a representação algébrica, introduzindo, assim, o pensamento algébrico, de forma natural. O embasamento teórico está alicerçado em Lins e Gimenez (2006) e Vale e Pimentel (2009). As atividades foram desenvolvidas com oito alunos, selecionados de uma turma com 34 alunos do 7º ano, que participaram em turno oposto a aula das atividades, de forma voluntária. Os resultados evidenciaram que a maioria dos alunos conseguiu identificar e desenhar os elementos que completaram uma sequência, porém apresentaram dificuldades na identificação e na escrita de generalizações. Ainda assim, os alunos demonstraram interesse pelas práticas e têm consciência da necessidade de compreender a Matemática, em particular, atividades diferenciadas para iniciar as representações algébricas.

Palavras-chave: Generalização; Álgebra; Ensino Fundamental.

Abstract

The activities described in this article were carried out with Elementary School students from a school located in the municipality of Santana, State of Amapá. The goal was to explore activities with geometric patterns. It is understood that, through them, it is possible to begin algebraic representation, thus introducing algebraic thinking, naturally. The backgruond came from Lins and Gimenez (2006), and Vale and Pimentel (2009). The activities were carried out with eight students, selected from a group with 34 students from the 7th grade, who participated after classes, on a voluntary basis. The results showed that most of the students were able to identify and draw the elements that completed a sequence, but presented difficulties in the identification and writing of generalizations. Still, students have shown interest in practice and are aware of the need to understand mathematics, in particular, differentiated activities to initiate algebraic representations.

Keywords: Generalization; Algebra; Elementary School.

CONTEXTUALIZAÇÃO

Muitos professores da Educação Básica se preocupam com a quantidade de conteúdos a serem ministrados e tendem a mostrar a Matemática como algo acabado e moldado, aplicando um número significativo de exercícios repetitivos, sem contexto e desconectados da realidade dos alunos. Isso ocorre de forma recorrente, em especial, no ensino da álgebra. Em geral, ela é escrita por meio de expressões algébricas que têm pouco sentido para os alunos, pois dificilmente eles entendem o significado daquelas representações.

Ademais, o que se observa, atualmente, é que a aritmética e a álgebra são exploradas separadamente. Nos Anos Iniciais, habitualmente, é ensinada somente a aritmética. Segundo Silva (2007), apesar de saber que, para o desenvolvimento do pensamento aritmético trabalham-se intuitivamente noções de álgebra, em termos gerais, a álgebra é explorada somente nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Desta forma, a transição da aritmética para a álgebra não se processa de forma natural, promovendo rupturas no aprendizado dos alunos. De acordo com Linz e Gimenez (2006), o estudo da álgebra, da aritmética e da geometria compõem as bases da Matemática do Ensino Fundamental, em que o ensinar álgebra de forma diferenciada pode facilitar a formação do pensamento algébrico no indivíduo. Ainda segundo os autores, no ensino da álgebra, qualquer procedimento técnico só pode ser compreendido pelo aluno a partir da produção de significados.

Para Borges, Rocha Filho e Basso (2008, p. 42),

é no 7º ano do Ensino Fundamental que se inicia esta nova fase e vem a aprofundar-se no 8º ano quando os alunos se deparam com procedimentos e técnicas totalmente novos e, geralmente, contraditórios aos conceitos e métodos aritméticos, com os quais estavam habituados nos anos anteriores de estudo.

No entanto, o pensamento algébrico pode ser iniciado anteriormente. Segundo Barbosa e Borralho (2009), as atividades que contemplam padrões apresentam-se como uma possibilidade para explorar e trabalhar as generalizações. Para Lopes (2012, p. 4, grifos dos autores):

Normalmente quando se fala de padrão associa-se logo a padrões visuais tais como se vê em tecidos, papel de parede e peças de arte. O conceito de padrão não se encontra apenas nestes exemplos, o padrão é usado também quando se fala de uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades.

Neste artigo, as regularidades serão utilizadas como disposição de formas e cores, e estarão relacionados às figuras geométricas.

Com relação aos padrões, Vale e Pimentel (2009, p. 11), embasados em Stacey e MacGregor (2001), afirmam que "as tarefas baseadas na descoberta de padrões têm sido frequentemente recomendadas como um meio de introduzir a álgebra fundamentalmente devido à representação dinâmica das variáveis". Para as autoras, "a realização de tarefas que envolvem o estudo de padrões ajuda os alunos a perceber a 'verdadeira' noção de variável que, para a maioria, é apenas vista como um número desconhecido" (VALE e PIMENTEL, 2009, p. 11).

Diante deste contexto, compreende-se que as atividades com padrões podem ser uma alternativa metodológica para alunos desenvolverem o pensamento algébrico. Assim, nesse estudo são apresentados resultados de duas das atividades realizadas com alunos do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do município de Santana, no estado do Amapá. As referidas atividades integraram a dissertação de mestrado do primeiro autor deste artigo, na área do Ensino de Ciências Exatas, da Universidade do Vale do Taquari, em Lajeado, Rio Grade do Sul.

DETALHAMENTO DAS ATIVIDADES

As atividades foram desenvolvidas com oito alunos selecionados, criteriosamente, por meio de um questionário, com relação ao gostar pouco ou muito de Matemática e tendo ou não dificuldades com cálculos, dentre trinta e quatro de uma turma de 7º ano. As características de cada um deles estão no Quadro 1. Os responsáveis pelos alunos assinaram um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, possibilitando aos alunos participarem da pesquisa, bem como usarem suas imagens e respostas dadas aos questionamentos.

Quadro 1 – Alunos que participaram das atividades e suas características

Identificação dos Alunos	Características atribuídas aos alunos por eles mesmos
Aluno 6	Gosta muito de Matemática, tem muita facilidade de realizar cálculos.
Aluno 8	Gosta pouco de Matemática, pois tem facilidade razoável para realizar cálculos.
Aluno 9	É a disciplina que mais gosta, apesar de ter facilidade razoável para realizar cálculos.
Aluno 20	É a disciplina que mais gosta, pois tem muita facilidade para realizar cálculos.
Aluno 21	É a disciplina que menos gosta, pois tem algumas dificuldades para realizar cálculos.
Aluno 28	É a disciplina que mais gosta, mas tem algumas dificuldades para realizar cálculos.
Aluno 29	É a disciplina que mais gosta, embora tenha algumas dificuldades para realizar cálculos.
Aluno 33	É a disciplina que mais gosta e tem facilidade razoável para realizar cálculos.

Fonte: Autores do artigo

As atividades contemplando padrões e sequências foram realizadas, em turno oposto, individualmente, e após cada atividade, ocorreu um momento para entrevista do professor pesquisador com os alunos possibilitando a correção, esclarecimento de possíveis dúvidas, confronto de estratégia de resolução e comentários pertinentes e relacionados ao padrão explorado. O intuito foi investigar o pensamento usado por cada aluno para completar as sequências, bem como descobrir as principais dificuldades enfrentadas.

Entende-se que a disponibilidade de um momento de diálogo com o aluno, individualmente, proporciona melhores resultados de avaliação, pois segundo Van de Walle (2009, p. 65):

Essa é uma das oportunidades que você terá na lição para descobrir o que seus alunos sabem, como eles pensam e como eles estão abordando a tarefa que você lhe deu. Você pode se sentar com um grupo e simplesmente escutar durante algum tempo, pode pedir a eles para explicar o que estão fazendo ou pode tomar notas. Se você quiser informações adicionais, experimente dizer: "Me conte o que você está fazendo", ou "você começou a multiplicar esses números, pode me dizer por que você está multiplicando?".

Após as entrevistas realizadas individualmente, as diferentes estratégias usadas pelos alunos foram escritas no quadro, uma após a outra. O objetivo foi fazê-los explicar as respostas encontradas e socializá-las com os colegas. Cabe ressaltar que neste trabalho, serão apresentadas somente duas das oito atividades propostas, pois optou-se pela profundidade na discussão dos resultados.

A primeira atividade (Figura 1) contemplou quatro subitens divididos em letras 1A, 1B, 1C e 1D, cada um com uma questão com duas figuras (triângulo e círculo) em uma sequência que se repetia indefinidamente.

Figura 1 – Atividade para determinar uma regra a partir da sequência de duas figuras geométricas repetidas

1 - Observe a sequência abaixo, descubra sua regra e continue desenhando nos locais assinalados pelos tracinhos. A seguir responda as perguntas.

1 A - Qual o 10° elemento da sequência?

1 B - Qual o 15° elemento da sequência?

1 C - E o 48° elemento?

1 D - Como você descreveria a regra da formação desta sequência?

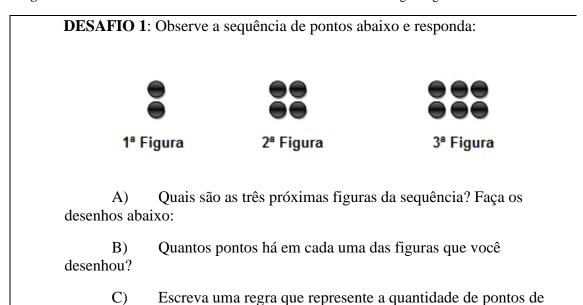
Fonte: Os autores.

A outra atividade contemplou dois desafios (Figura 2). No desafio 1, composto pelos subitens d1A, d1B e d1C, o objetivo era observar uma sequência de pontos, representar as três figuras seguintes, contar o número de pontos em cada uma e, por fim, escrever uma regra que representasse a quantidade de pontos de qualquer figura da sequência.

No desafio 2, que contemplou cinco subitens indicados por d2A, d2B, d2C, d2D e d2E foram abordadas três classes numéricas: Números Triangulares, Números Quadrados e Números Pentagonais. Os objetivos se concentraram na observação das três classes numéricas: descobrir o próximo número de cada sequência, desenhando ao lado; escrever os quatro primeiros números quadrados na forma de potência de expoente 2; determinar o sétimo e o décimo números quadrados; calcular o número de bolinhas existentes na sétima figura triangular e na quinta figura pentagonal; e escrever uma regra que representasse o número de bolinhas triangulares e outra regra para os números pentagonais.

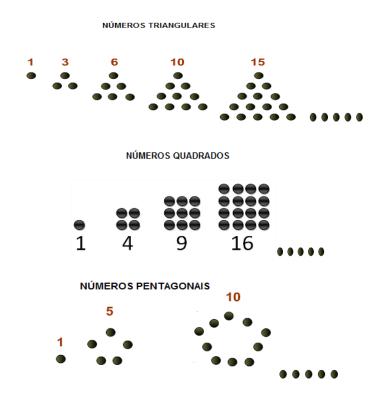
Esta atividade consistiu na determinação de padrões, pois, com o pensamento algébrico, dáse a possibilidade de observação não só para com os objetos, mas principalmente para com as relações existentes entre eles, o que faz parte do processo de generalização. Assim, uma das possíveis vias para promover tal pensamento é pelo estudo de padrões.

Figura 2 – Atividade abordando dois desafios envolvendo bolinhas e figuras geométricas



qualquer figura da sequência

DESAFIO 2: Os números são classificados de muitas maneiras. Alguns nomes vêm do fato de poderem ser dispostos segundo formas geométricas. Veja a seguir alguns exemplos:



- A) Descubra qual o próximo número de cada sequência, desenhando ao lado.
- B) Escreva os quatro primeiros números quadrados em forma de potência de expoente 2. Observe as potências e responda: Qual o sétimo número quadrado? E qual o décimo?
 - C) Escreva uma regra para representar qualquer número quadrado.
- D) Quantas bolinhas existem na sétima figura triangular? E na 5ª figura pentagonal?
- E) Escreva uma regra que representa o número de bolinhas triangulares e outra regra para os números pentagonais.

Fonte: Os autores.

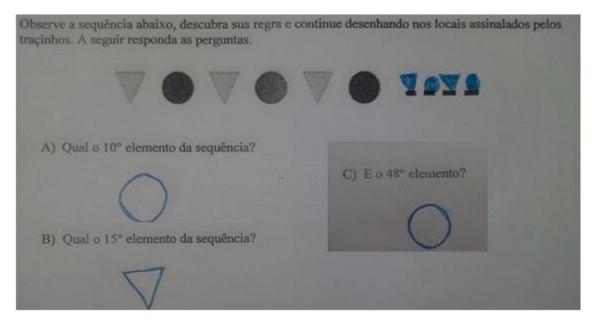
As respostas dadas pelos oito alunos às atividades propostas foram obtidas por meio dos materiais recolhidos (folhas) nos quais os alunos representaram suas respostas, fotografias e as entrevistas gravadas para posterior análise. Os dados foram compilados qualitativamente e estão descritos a seguir, adotando-se quanto aos objetivos o tipo de pesquisa descritiva. Para Triviños (1987), este tipo de estudo tem por objetivo descrever os fatos e fenômenos de certa realidade. Neste caso, como os alunos tentaram realizar as generalizações algébricas. A seguir, são apresentados os dados obtidos das duas questões contempladas neste artigo.

RESULTADOS OBTIDOS

Como já mencionado anteriormente, as atividades foram desenvolvidas com oito alunos conforme descrito no Quadro 1. As respostas inicialmente, não estarão relacionadas a este fator, mas ao final, no item de considerações, voltar-se-á a essa discussão.

Analisando as respostas dadas na primeira atividade (Figura 1), quanto aos itens 1A, 1B e 1C, sete alunos representaram corretamente os desenhos das figuras, conforme se ilustra na Figura 3, a resposta dada por um aluno. O objetivo da questão era identificar, numa dada sequência de elementos, o 10°, o 15° e o 48° elementos, respectivamente.

Figura 3 – Resposta aos itens 1A, 1B e 1C da atividade 1 do aluno 28



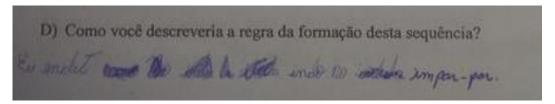
Fonte: Os autores, com base na resposta do aluno 28.

Durante a entrevista individual, os alunos foram questionados acerca da forma como eles encontraram a resposta "círculo" no item A. A maioria respondeu de forma semelhante, entre eles o aluno 28: "Por que o primeiro é o triângulo e o segundo é o círculo e que tem seis elementos". Para encontrar o 15° e o 48° elementos, os alunos justificaram: "eu fiz a mesma coisa", ou seja, continuaram contando. Apenas um aluno não conseguiu compreender as perguntas contidas nos itens 1A e 1C. Este aluno, conforme perfil indicado por ele mesmo, tem muita dificuldade em Matemática.

Como se pode observar, os alunos descobriram e identificaram que a sequência era formada pela repetição das figuras geométricas triângulo, círculo, triângulo, círculo e, assim, sucessivamente e essa regra aplicaram para os demais elementos. Segunda Vale e Pimentel (2009), os alunos recorreram à linguagem verbal para expressar seu pensamento.

Com relação ao item 1D, três dos oito alunos justificaram que deram continuidade à regra, dois contaram triângulo e círculo, um aluno aferiu de dois em dois, e dois alunos conferiram do ímparpar, similar à dada pelo aluno 33, conforme ilustra Figura 4.

Figura 4 – Resposta do aluno 33 que utilizou o método ímpar-par à atividade 1D.



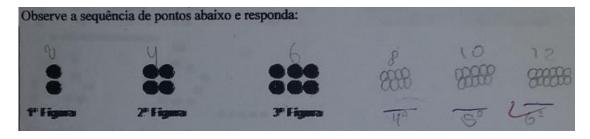
Fonte: Os autores, com base nas respostas do aluno 33.

A partir da fala do aluno, pode-se inferir que o aluno quis afirmar que o triângulo estará sempre na posição ímpar (1°, 3°, 5°, ...) e o círculo estará na posição par (2°, 4°, 6°, ...). Aqui cabe frisar que o aluno conseguiu uma generalização, mesmo esta sendo de forma escrita, mas ainda não algébrica. Este tipo de atividade vem ao encontro do que comenta Lopes (2012, p. 4): "um dos objetivos da Matemática é descobrir a regularidade onde no meio da desordem e confusão seja possível tirar a estrutura e a invariância". Neste caso, a ordem é como o aluno 33 alude: "indo no ímpar-par". Ainda cabe comentar que este aluno, segundo sua autodeclaração gosta de Matemática e tem certa facilidade com os números.

Notou-se nessa atividade inicial que a maioria dos alunos tem dificuldades de generalizar padrões, assim como de representá-los de acordo com uma determinada regra, com uso de letras ou símbolos. Pode-se dizer que houve dificuldades na expressão da resposta por meio de linguagem simbólica. Mas para Vale e Pimentel (2009), é importante que os alunos passem por diferentes atividades que possam valorizar a descoberta, continuação, complemento, e construção de padrões e o percurso em direção à explicitação de uma lei de formação.

No que tange à atividade 2 (Figura 2), somente cinco dos oito alunos completaram corretamente os desenhos das figuras na sequência dada. O fato de o aluno desenhar alguns elementos da sequência (item d1A) pode ser um aspecto considerado facilitador, assim o aluno tem a possibilidade de interpretar melhor e apresentar uma regra com mais consistência, como mostrado na Figura 5. Segundo Vale e Pimentel (2009), um desenho também é uma forma de representação do pensamento. Ainda é possível observar que o aluno escreveu os números acima das figuras, o que pode ter favorecido também a compreensão.

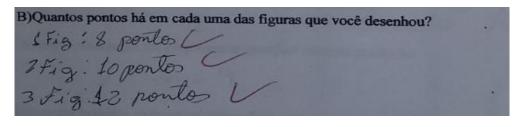
Figura 5 – Continuação da sequência dos elementos respondida pelo aluno 20.



Fonte: Os autores, com base no aluno 20.

Distintamente do item d1A, no item d1B, cinco alunos resolveram incorretamente a questão. Entre os que acertaram o desafio, está a resposta do aluno que contou 8, 10 e 12 pontos, conforme Figura 6. Cabe salientar que a "1 Fig" refere-se à quarta figura da sequência, mas a primeira que ele desenhou. A "Fig 2" e a "Fig 3" devem ser interpretadas da mesma forma.

Figura 6 – Exemplo de resposta do item d1B do desafio 1 dada pelo aluno 21.

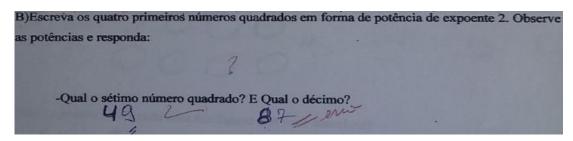


Fonte: Os autores, com base no aluno 21.

Comparando a forma de resposta, observam-se diferentes tipos de representação de sequência, sendo por meio de desenho (Figura 5) ou expressa de forma numérica (Figura 6). Uma sequência pode apresentar um padrão de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior e essa mudança representa uma regularidade. Este tipo de padrão proporciona explorações matematicamente ricas e variadas e é um contexto privilegiado para o desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular na transição da aritmética para a álgebra. A tradução algébrica da generalização de um padrão pode ser facilitada e mais bem entendida pelos alunos se for efetuada por meio de tarefas em contextos figurativos.

Analisando as respostas do desafio 2, sete alunos completaram os desenhos das figuras na sequência. Porém, no item d2A, apenas um aluno resolveu adequadamente a questão. No item d2B, somente dois alunos resolveram de forma adequada, dois resolveram de modo parcial, acertando o sétimo ou o décimo número quadrado, sem a representação escrita em forma de potência de expoente 2, como pode ser visto no exemplo da Figura 7.

Figura 7 – Resposta do aluno 8 no item d2B do desafio 2.

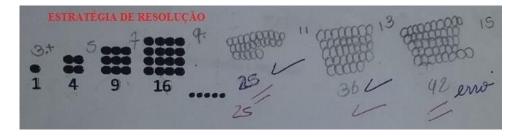


Fonte: Os autores, com base na resposta do aluno 8.

Outros quatro alunos resolveram erroneamente a questão e, em certos casos, até deixaram-na em branco sem qualquer registro de cálculo.

Analisando o item d2C, somente um aluno resolveu a questão de forma correta, os demais tentaram diferentes estratégias de resolução, conforme ilustra a Figura 8.

Figura 8 – Resolução do item d2C dada pelo aluno 20.

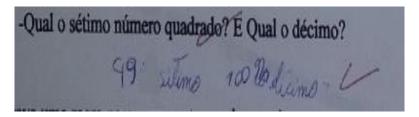


Fonte: Os autores, com base nas respostas do aluno 20.

A partir da estratégia usada, o raciocínio matemático usado pelo aluno 20 foi: 1 + 3 = 4 e 4 + 5 = 9 e 9 + 7 = 16 e 16 + 9 = 25 e 25 + 11 = 36 e 36 + 13 = 49 (no caso o aluno escreveu equivocadamente, 42), e assim por diante. A cada número quadrado, na ordem, soma-se um número ímpar (1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, e assim por diante), gerando dessa maneira o próximo número quadrado. Cabe salientar aqui que o padrão pensado pelo aluno é numérico (sempre somando os números ímpares) e não em formato geométrico como um quadrado (1x1, 2x2, 3x3, 4x4 e assim por diante). Neste sentido caberia uma pergunta: Será que este aluno apenas pensou de forma numérica ou teria ele também pensado no padrão geométrico? Estaria ele satisfeito com esta resposta? Por que procuraria outro padrão se já encontrou um? O professor o instigou a encontrar outro padrão? São perguntas que podem ser problematizadas e pensadas pelos leitores do presente artigo. No momento da entrevista isso não foi observado, perdendo-se uma oportunidade de investigação.

Dando continuidade, no item d2D, a maior dificuldade foi contar quantas bolinhas havia na quinta figura da sequência dos números pentagonais. Um aluno resolveu de forma correta, conforme ilustra a Figura 9.

Figura 9 – Resolução do item d2D pelo aluno 33



Fonte: Os autores, com base nas respostas do aluno 33.

Investigando o item d2E, apenas um aluno encontrou a resposta certa e cinco alunos resolveram equivocadamente. Como se pode observar, nas questões em que não era possível observar o elemento, mas imaginá-lo, os erros foram mais frequentes.

Lins e Gimenez (2006, p. 83) relatam que "a maioria de nós ainda não está convencida da importância de trabalhar, desde cedo, com os processos de generalização na direção da álgebra, nem insiste suficientemente no cálculo com medidas e enunciados". De certa forma, o aluno poderia reconhecer a possibilidade de generalização desde cedo e isso ele é possível reconhecendo padrões numéricos. Os autores ainda afirmam que a situação "generalizada" emerge quando os alunos passam a falar do que é comum a um conjunto de casos particulares (como no padrão de número de bolinhas triangulares).

CONSIDERAÇÕES

Ao avaliar as respostas, em termos gerais, três alunos, dos oito envolvidos nas atividades, conseguiram estabelecer uma linha constante de acertos. Segundo os alunos, são os que mais gostam de Matemática, portanto, tiveram certa facilidade para resolverem os cálculos. O aluno que mais obteve acertos foi aquele que apresenta facilidade em resolver cálculos e que gosta também da disciplina. Por outro lado, o aluno que mais apresentou respostas erradas, foi o aluno cujo perfil é gostar muito de Matemática, mas tem dificuldade em realizar cálculos. Infere-se aqui, que o número de acertos e erros pode estar atrelado ao fato dos alunos não estarem acostumados a realizarem atividades como estas, aplicadas neste estudo. Isso ficou evidente na fala destes alunos quando mencionaram nas entrevistas que estavam habituados a trabalhar somente com livros didáticos e de forma individual.

No geral, a cada atividade realizada, os alunos apresentaram avanços em relação a anterior. Nas questões envolvendo generalização, alguns alunos conseguiram escrever uma regra, mas não na forma de notação característica da álgebra, expressa por letras. Isso denota que neste grupo de alunos foram percebidas muitas dificuldades, mas também possibilidades de avanço, pois mostraram-se dispostos a aprender.

De forma geral, evidenciou-se grande dificuldade dos alunos em identificar regularidades e generalizar padrões, elementos importantes para a o uso de simbologia e consequentemente, o desenvolvimento algébrico. Apesar da dificuldade, os alunos têm consciência da necessidade da Matemática e, em particular, atividades diferenciadas com a álgebra, para assim compreendê-la.

REFERÊNCIAS

Barbosa, E. & Borralho, A. (2009). *Pensamento algébrico e exploração de padrões*. Centro de Investigação em Educação e Psicologia e Departamento de Pedagogia e Educação da Universidade de Évora - Portugal. Recuperado em 14 abr. 2016 de: http://www.apm.pt/files/_Cd_Borralho_Barbosa_4a5752d698ac2.pdf.

Borges, R. M. R.; Rocha Filho, J. B. da & Basso, N. R. de S. (2008). *Avaliação e Iteratividade na Educação Básica em Ciências e Matemática*. Porto Alegre: ed. PURCRS.

Lins, R. C. & Gimenez, J. (2006). *Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI*. Campinas: Papirus, 2006.

Lopes, T. I. D. (2012). *Padrões no Ensino Básico. Faculdade de Ciências e Tecnologia*. Coimbra, Portugal, 2012. Recuperado em 05 fev. 2019 em: http://www.mat.uc.pt/~mat0717/public_html/Cadeiras/1Semestre/TrabalhoPadroes_TANIALOPES.pdf.

Silva, R. N. (2007). *Álgebra e Aritmética no Ensino Fundamental*: Um Estudo de como ensiná-los de forma integrada e com Bases em significados. Monografia (Graduação em Matemática) — Universidade Católica de Brasília. Recuperado em 12 mai. 2016 em: https://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22007/RondineleNunesdaSilva.pdf.

Triviños, A. N. S. (1987). *Introdução à pesquisa em ciências sociais*: a pesquisa qualitativa em educação. São Paulo: Atlas.

Vale, Isabel; Pimentel, Teresa. (2009). *Padrões no Ensino e Aprendizagem da Matemática*. Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Projecto Padrões.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental* [recurso eletrônico]: Formação de professores em sala de aula/John A. Van de Walle: Tradução Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre. Artmed.