ASPECTOS COGNITIVOS EM AULAS COM MODELAGEM MATEMÁTICA NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Cognitive aspects in classes with Mathematical Modeling in the discipline Differential and Integral Calculus

Karina Alessandra Pessoa da Silva [karinasilva@utfpr.edu.br]
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR
Câmpus Londrina, Avenida dos Pioneiros, 3131.
CEP: 86036-370, Londrina – PR - Brasil

Resumo

Neste artigo apresentamos uma investigação realizada com o intuito de evidenciar aspectos cognitivos nos signos produzidos pelos alunos em uma atividade de modelagem matemática desenvolvida em aulas regulares de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Para isso, nos apoiamos no entendimento da modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica e nos aportes teóricos da semiótica enquanto ciência dos signos. A atividade que analisamos foi desenvolvida em sala de aula e as discussões que empreendemos são subsidiadas pelos signos produzidos por um dos grupos de alunos do primeiro período de um curso de Licenciatura em Química de uma universidade federal do estado do Paraná. Por meio da variedade de signos produzidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade inferimos que conhecimentos matemáticos da disciplina e conhecimentos químicos foram articulados.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Aspectos Cognitivos; Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract

In this article we present an investigation in order to evidence cognitive aspects in the signs produced by the students in mathematical modeling activity developed in regular classes of a discipline Differential and Integral Calculus 1. For this, we supported on the understanding of mathematical modeling as a pedagogical alternative and theoretical contributions of semiotics as a science of signs. The activity that we analyzed was developed in the classroom and the discussions we undertake are subsidized by signs produced by a group of students of the first period of a course degree in Chemistry from a Federal University of Parana state. Through the variety of signs produced by the students in the development activity we infer that mathematical knowledge of the discipline and chemical knowledge were articulated.

Keywords: Mathematical Modeling; Cognitives Aspects; Differential and Integral Calculus.

Introdução

Partindo do pressuposto de que ensinar não é transferir conhecimentos, mas criar possibilidades para a sua construção ou produção, um grupo de professores de uma universidade federal do estado do Paraná, dentre os quais a autora deste texto, tem empreendido esforços em suas práticas docentes e em suas ações nas pesquisas para caracterizar um ambiente educacional para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Uma dessas ações foi a elaboração de um projeto de pesquisa com foco no trabalho em sala de aula em que se propõem a investigar um ambiente educacional para o Cálculo Diferencial e Integral em condições reais de ensino. Tal projeto foi submetido e aprovado no Edital Universal 14/2014 do CNPq.

Nosso envolvimento com pesquisas e práticas de modelagem matemática em sala de aula nos encorajou a integrá-la no ambiente educacional almejado, entendendo que se trata de uma alternativa pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Matemática e que tem potencial para abordar situações do cotidiano através de lentes matemáticas. A perspectiva de modelagem matemática que adotamos diz respeito à suas potencialidades enquanto oportunidade para os alunos compreenderem os objetos matemáticos, conhecer e relacionar as várias representações destes objetos e utilizá-los para interpretar fatos da realidade.

Pesquisas que tratam das representações de objetos matemáticos que emergem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática têm sido compartilhadas na comunidade de educadores matemáticos. Em termos gerais, são destacados os tipos de representações que se fazem presentes e o que os alunos que as produziram dizem sobre as mesmas. No presente artigo argumentamos que aspectos cognitivos podem ser evidenciados nas representações e outros signos produzidos pelos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem. Para uma análise de signos nos fundamentamos na teoria semiótica de Charles Sanders Peirce e seus interpretadores no que se referem aos aspectos cognitivos. Os aspectos cognitivos podem ser evidenciados nos registros escritos, nas falas e nos gestos que emergem no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e que se constituem em um acervo de informações que podem ser analisadas.

Neste contexto, temos como objetivo investigar *que aspectos cognitivos podem ser evidenciados nos signos produzidos pelos alunos do curso de Licenciatura em Química quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática?*. Essa investigação consiste em resultados parciais do projeto de pesquisa supracitado.

Nossas reflexões a respeito da questão de investigação são subsidiadas na análise do desenvolvimento de uma atividade de modelagem em sala de aula por um grupo de estudantes de um curso de Licenciatura em Química em uma disciplina de Cálculo Diferencial em Integral 1, no primeiro semestre de 2015. Tais análises nos possibilitam conduzir reflexões e considerações sobre aspectos cognitivos em atividades de modelagem matemática.

Embora anos de pesquisas sobre modelagem matemática tenham contribuído para a presença da modelagem nas práticas docentes em diferentes níveis de ensino, o trabalho com modelagem em sala de aula ainda pode ser considerado tímido, por isso, entendemos que ainda é um desafio no campo profissional. Assim, esta investigação pretende contribuir ao exemplificar tanto a prática docente com modelagem, quanto a possibilidade de refletir sobre essa prática por meio da pesquisa, a partir da coleta de dados em sala de aula.

Para fazer essa abordagem, este texto está estruturado, além desta introdução, em cinco seções subsequentes. Na primeira tratamos da modelagem matemática na Educação Matemática sob uma perspectiva educacional e cognitivista que nos orienta a trabalhar conteúdos matemáticos em sala de aula. Em seguida, tratamos dos estudos dos signos por meio da semiótica peirceana. Na terceira seção apresentamos os aspectos metodológicos que orientam nossa investigação para, na quarta seção, apresentarmos a análise da atividade desenvolvida. Finalizamos apresentando algumas ponderações sobre a investigação realizada.

Sobre Modelagem Matemática

Na literatura, muitas são as conceitualizações empregadas para designar modelagem matemática. São utilizadas expressões como: metodologia de ensino e aprendizagem, ambiente de aprendizagem, alternativa pedagógica, entre outras. No entanto, é de se evidenciar que o foco do trabalho com modelagem matemática está atrelado a ensinar matemática e, nesse sentido, levando em consideração o projeto de pesquisa no qual a investigação está alocada, adotamos a modelagem matemática enquanto alternativa pedagógica. Alternativa entendida como uma escolha dentre as diferentes tendências da Educação Matemática e pedagógica por considerarmos os processos de ensino e aprendizagem do aluno. Nesse sentido, a modelagem matemática é a escolha que fazemos para ensinar matemática por meio de situações que, de forma geral, se encontram 'fora' do contexto matemático, com o objetivo de que os envolvidos aprendam matemática.

Com relação a essas considerações, quando nos referimos à modelagem matemática, estamos tratando de atividades que têm como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto de chegada uma situação final (solução para a situação inicial). Nesse encaminhamento da situação inicial para a situação final é realizada uma interpretação matemática do fenômeno em estudo na qual são utilizados procedimentos que definem estratégias de ação dos sujeitos envolvidos. Almeida, Silva & Vertuan (2012) identificam elementos que, de modo geral, se fazem presentes em atividades de modelagem. Segundo os autores,

> [...] o início é uma situação-problema; os procedimentos de resolução não são predefinidos e as soluções não são previamente conhecidas; ocorre a investigação de um problema; conceitos matemáticos são introduzidos ou aplicados; ocorre a análise da solução (Almeida; Silva & Vertuan, 2012, p.17).

Em aulas de Matemática, esses 'elementos' que caracterizam uma atividade de modelagem aproximam o aluno de uma atividade investigativa. Segundo Almeida & Ferruzzi (2009), uma atividade de modelagem requer do aluno a formulação de um problema e a definição de metas para sua resolução, a definição de hipóteses, a formulação de previsões e a apresentação de explicações e respostas para a situação em estudo bem como a comunicação destas respostas e/ou explicações para outros. Complementando as considerações de Almeida & Ferruzzi (2009), as autoras Almeida & Silva (2012), destacam que

> [...] um aspecto importante numa atividade de modelagem matemática é a necessidade de os próprios alunos, a partir de uma situação-problema não matemática, fazerem a associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema e possibilitar a sua análise (Almeida & Silva, 2012, p. 627).

A associação com conceitos matemáticos para conduzir a uma solução para o problema, de certa forma, é vivenciada pelos alunos por meio de representações. Em atividades de modelagem, uma representação explicitada pelos sujeitos e que cujas declarações estão em um nível matemático é denominada, segundo Borromeo Ferri (2006), como modelo matemático. Podemos considerar, com isso, que um modelo matemático pode ser expresso por meio de um sistema conceitual e é utilizado para construir, descrever ou explicar como outros sistemas se comportam. Os sistemas conceituais constituem-se de elementos, relações, operações e regras de interação.

Investigações com o objetivo de introduzir e desenvolver atividades de modelagem matemática em que os alunos externalizam representações em um nível matemático nas aulas, vêm sendo conduzidas por diferentes autores. Niss (1992), Blum & Niss (1991), Barbosa (2001), Bassanezi (2002), Almeida & Dias (2007), Legé (2005), Caldeira (2009), Silveira & Caldeira (2010), Pereira & Junior (2011), Soares et al. (2014), Almeida, Silva & Veronez (2015) são alguns desses autores.

Considerar os aspectos da atividade de modelagem, até então discutidos no texto, implica em tomá-la em suas perspectivas educacional e cognitivista, tal como apresentadas em Kaiser & Sriraman (2006). As autoras sistematizaram seis perspectivas para a modelagem matemática, as quais evidenciam diferentes aspectos quanto ao objetivo central com que a atividade de modelagem é desenvolvida em contextos educativos.

Na perspectiva educacional, a modelagem matemática é caracterizada como uma abordagem didática e/ou conceitual em que é possível estruturar e promover o ensino e aprendizagem e/ou introduzir e desenvolver conceitos. A perspectiva cognitivista tem como objetivo analisar os processos cognitivos que ocorrem durante a atividade de modelagem matemática. A perspectiva cognitivista está intimamente relacionada à perspectiva educacional, principalmente porque tem como uma de suas preocupações principais buscar compreender os processos cognitivos individuais dos alunos em modelagem, bem como identificar barreiras matemáticas, psicológicas e cognitivas relacionadas com a aprendizagem via modelagem.

Diante do foco do trabalho em evidenciar aspectos cognitivos via atividades de modelagem, faz-se conveniente adotar como perspectivas de análise a cognitivista e a educacional. No entanto, não se trata de valorizar uma perspectiva em detrimento de outra, mas de atender a interesses e ou necessidades em situações de ensino e aprendizagem particulares. Com relação a uma análise das representações e dos signos que emergem de atividades de modelagem, nos fundamentamos na semiótica peirceana.

Sobre aspectos representacionais e cognitivos: nossa abordagem

Podemos iniciar uma discussão sobre os aspectos representacionais tratando, em linhas gerais, do que constitui o termo representação. Ainda que o termo "representação" consista no ato ou efeito de representar, ou seja, da necessidade de tornar algo presente, muitas são as designações consideradas, dependendo da área de estudo a que se destina. Costa (2007) argumenta que

> O termo representação tem conceitos distintos que vão da sociologia à filosofia; do direito às artes cênicas e plásticas. Na rubrica filosófica, significa a operação pela qual a mente tem presente em si mesma a imagem, a ideia ou o conceito que correspondem a um objeto que se encontra fora da consciência. Já na área da psicologia o termo é tido como imagem intencionalmente chamada à consciência e mais ou menos completa de um objeto qualquer ou de um fato antes percebido ou ainda o conteúdo consciente vivido como um todo coerente e que está orientado, involuntariamente de qualquer dado de realidade, para um determinado campo de objetos, acontecimentos ou situações. Sem contar no sentido teatral do termo como sendo uma "encenação" (Costa, 2007, p. 2).

Levando em consideração assertivas filosóficas desenvolvidas por Peirce (2005), nos pautamos na ideia de que representar é "estar em lugar de, isto é, estar numa relação com um outro que, para certos propósitos, é considerado por alguma mente como se fosse esse outro" (p. 61). As representações de alguma forma caracterizam algo (o objeto) e são consideradas signos deste objeto. O signo, segundo Peirce (2005), é algo que para uma pessoa toma lugar de outra coisa (objeto), não em todos os aspectos desta coisa, mas de acordo com certa forma e capacidade.

Peirce (2005) faz uma relação entre signo e representação: "Quando se deseja distinguir entre aquilo que representa e o ato ou relação de representação, pode-se denominar o primeiro de 'representâmen' e o último de 'representação'" (p. 61). Com isso, Peirce (2005) considera que a representação é uma função do signo.

Godino (2003) considera que uma representação é um signo que se pode colocar no lugar de algo distinto dele mesmo. Dessa forma, a representação pode ser considerada como uma ação de simbolizar, codificar, dar uma imagem ou representar algo. Destacando elementos de semiótica no ensino e aprendizagem da matemática, D'Amore, Pinilla & Iori (2015, p.112), afirmam que "uma pluralidade de representações favorece a construção cognitiva do objeto representado, uma vez que cada uma contribui de maneira específica com alguns aspectos do objeto". Nesse sentido, a representação/signo estando no lugar do objeto, pode não revelar o objeto na sua totalidade, mas apenas em alguns de seus aspectos e "uma única representação nunca pode ser suficiente para construir cognitivamente de maneira eficaz um objeto matemático" (D'Amore; Pinilla & Iori, 2015, p. 169).

Colocar em evidência os signos que emergem nas atividades matemáticas nos possibilita tratar dos aspectos cognitivos. Esse tratamento pode ser feito levando em consideração a ciência dos signos, os signos da linguagem e que são abordadas na semiótica, mais precisamente na semiótica peirceana. Nos estudos realizados sobre a semiótica, Peirce (1972) trata o signo como uma relação entre três elementos — objeto, signo (ou representámen) e interpretante — em que o signo estabelece uma mediação entre objeto e interpretante. Neste sentido, Peirce (1972) afirma que da relação entre signo e objeto resulta outro signo, o interpretante. Esse novo signo é um processo racional que se cria na mente do intérprete. A ação própria do signo é determinar um interpretante, ou seja, a ação do signo é a ação de ser interpretado em outro signo, pois o interpretante, segundo Peirce, tem a natureza de um signo criado em uma mente interpretadora. "É só na relação com o interpretante que o signo completa sua ação como signo" (Santaella, 2007, p. 37). Segundo Santaella (2008),

> [...] A partir da relação de representação que o signo mantém com seu objeto, produz-se na mente interpretadora um outro signo que traduz o significado do primeiro (é o interpretante do primeiro). Portanto, o significado de um signo é outro signo — seja este uma imagem mental ou palpável, uma ação ou mera reação gestual, uma palavra ou mero sentimento de alegria, raiva... uma ideia, ou seja lá o que for — porque esse seja lá o que for, que é criado na mente pelo signo, é um outro signo (tradução do primeiro) (Santaella, 2008, p. 58-59).

Neste contexto, Peirce estuda o "processo no qual o signo tem um efeito cognitivo sobre o intérprete" (CP, 5.484, apud Nöth, 2008, p. 66). E para evidenciar esse efeito cognitivo em atividades de modelagem matemática investigamos seu desenvolvimento por alunos em sala de aula, pois entendemos conforme D'Amore, Pinilla & Iori (2015, p. 105), que devemos convidar "os nossos alunos a refletir sobre as implicações semióticas do que propomos".

Sobre atividades de modelagem matemática neste cenário: aspectos metodológicos

Entendemos que uma atividade de modelagem matemática é aquela que tem como ponto de partida uma situação inicial problemática e como ponto de chegada uma solução para a situação que se propôs a investigar. Nesse entendimento, consideramos que se tratam de atividades que possibilitam contatos de forma implícita ou explícita com situações-problema que refletem interesses dos alunos. Em linhas gerais, esse 'contato' ocorre por meio de signos que permeiam toda a situação-problema que se investiga. Esses signos podem representar os objetos de tal situação. O que buscamos, com isso, é evidenciar aspectos cognitivos nos signos produzidos pelos alunos do curso de Licenciatura em Química quando desenvolvem uma atividade de modelagem matemática. Para isso, se faz necessário realizar uma interpretação semiótica da atividade de modelagem matemática desenvolvida, levando em consideração os signos produzidos pelos envolvidos.

Mas em que consiste uma interpretação semiótica em atividades de modelagem matemática? Em sentido peirceano, segundo Santaella (2005), a interpretação "se refere ao processo inteiro de geração dos interpretantes" (p. 43). Neste contexto, fazer uma interpretação semiótica em atividades de modelagem para investigar os aspectos cognitivos está diretamente relacionado à investigação do processo de geração de interpretantes no desenvolvimento de tais atividades. O acesso a esses interpretantes se realiza por meio dos signos escritos, gesticulados e falados pelos intérpretes envolvidos na atividade.

Levando em consideração essas assertivas, nossa investigação se pauta em uma atividade de modelagem matemática cuja situação problemática centra-se no estudo da concentração de ritalina no organismo de uma pessoa segundo a meia-vida. Consideramos que se trata de uma situação do interesse de alunos de um curso de Licenciatura em Química na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 em que objetos matemáticos podem emergir ao mesmo tempo em que uma análise química quanto à capacidade radioativa e à saturação da concentração não é olvidada.

A atividade foi desenvolvida com uma turma de 44 alunos reunidos em grupos durante 5horas/aula regulares da disciplina ministrada pela autora deste artigo em uma universidade federal do estado do Paraná, no primeiro semestre de 2015. As informações que analisamos foram obtidas usando registros escritos dos alunos bem como a transcrição de gravações em áudio e vídeo do desenvolvimento dessa atividade, obtidas com o consentimento dos mesmos. Neste artigo, a análise que empreendemos para realizar uma interpretação semiótica leva em consideração as informações relativas à atividade desenvolvida por um desses grupos formado por três alunos integrantes que são designados por nomes fictícios – Rita, João e Lucas – orientados pela professora.

Do ponto de vista metodológico, trata-se de uma pesquisa com abordagem qualitativa, que segundo Garnica (2004), tem como características:

> (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma análise a priori, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de se estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas (Garnica, 2004, p. 86).

Vale ressaltar que os objetos matemáticos que emergiram da situação proposta já haviam sido abordados com a turma antes do desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Nesse sentido, a análise interpretativa que realizamos está ancorada nos aspectos cognitivos evidenciados nas representações utilizadas pelos alunos para esses objetos matemáticos, além de outros que se fizeram presentes.

Interpretação semiótica da atividade de modelagem matemática desenvolvida

Fundamentadas nos aportes teóricos que sustentam nossas argumentações, realizamos uma interpretação semiótica da atividade de modelagem que trata do estudo da concentração de metilfenidato (ritalina) no organismo. Para adentrar ao estudo da situação foi entregue aos alunos as informações como apresentado no Quadro 1.

O cloridrato de metilfenidato que é da família das anfetaminas disponível no mercado sob a forma de cápsulas, é muito indicado para crianças e adultos, principalmente em idade escolar, que são detectados como portadores de Transtorno de Déficit de Atenção e Hiperatividade (TDAH). Ritalina é o nome comercial de um medicamento no qual cada cápsula contém 10 mg de metilfenidato. Médicos neurologistas, de forma geral, receitam para crianças de 6 anos um comprimido de 10 mg de ritalina duas vezes ao dia. Esse tratamento pode se estender até a adolescência, ou até mesmo à fase adulta. Na fase adulta a posologia do medicamento é alterada. Segundo informações da bula do medicamento, o metilfenidato é eliminado do plasma com meia-vida média de 2 horas, ou seja, a cada duas horas o efeito químico do medicamento reduz-se pela metade. Na atividade, o que se pretende investigar é a concentração do medicamento no organismo de crianças de 6 anos que recebem uma posologia na qual a cada 12 horas ingere um novo medicamento.

Quadro 1 – Informações fornecidas aos alunos
Fonte: Elaborado pela autora.

Os integrantes do grupo diante de tais informações iniciaram a discussão para definirem o que de fato iriam estudar e a abordagem matemática que dariam para a situação, conforme transcrição a seguir:

Rita: Bom, temos essas informações. E daí?
João: Daí que temos que ver o que vamos usar... vamos usar a matemática aqui.
Rita: Claro né? Mas tem coisas de Química também. Para estudar a meia-vida. João, você lembra qual é aquela expressão geral de meia-vida?
João: Sim, claro. É a quantidade inicial dividida por dois e esse dois elevado à meia-vida. Também podemos usar o tempo dividido pelo tempo de meia-vida.
Lucas: Como assim? Tem como escrever?
Rita: Lembra da atividade do césio que a professora fez conosco e vimos essa expressão geral da meia-vida naquele site? Ela disse que estava certo! Vou fazer o gráfico aqui e associar com a expressão.

De posse das informações da situação-problema, os alunos as relacionam com experiências colaterais de sala de aula retomando a expressão que utilizam para determinar a concentração de um elemento químico a partir de sua meia-vida $C_n = \frac{C_0}{2^n}$, em que C representa a concentração em miligramas em função do número de meias-vida n. O que podemos evidenciar é que os alunos buscam representar matematicamente a situação por meio de uma expressão algébrica que faz parte de suas experiências anteriores, fazendo "uma associação com conceitos e/ou procedimentos matemáticos capazes de conduzir a uma solução para o problema" (Almeida & Silva, 2012). A partir do signo em língua natural produzido por João, os integrantes fazem uma transformação para o signo algébrico.

Os alunos consideram a concentração inicial igual a 10 mg, conforme apresentada no Quando 1 e realizam uma mudança de variável, considerando o tempo t em horas, obtendo o modelo matemático $C(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$. Para desenvolver o modelo matemático, João utilizou três representações (gráfico, tabela e expressão algébrica), conforme consta na Figura 1.

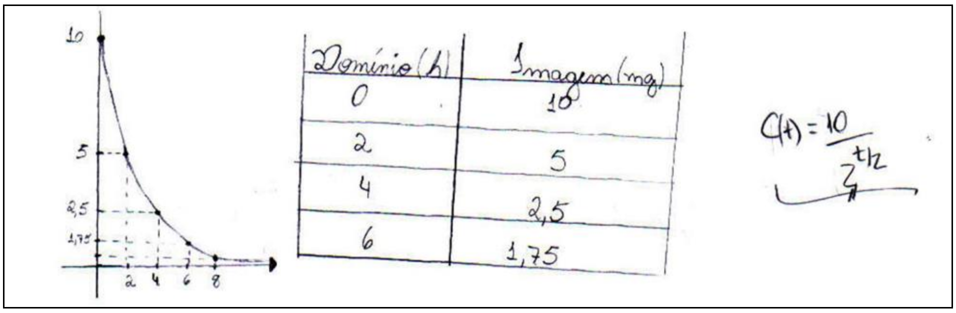

Figura 1 – Registros para o modelo matemático com a ingestão de um comprimido
Fonte: Relatório de João.

A partir dos registros escritos por João (Figura 1), Rita ainda faz algumas considerações matemáticas, conforme transcrição:

> *Rita: Olha só, essa expressão e o gráfico são de uma função exponencial decrescente. Conforme aumenta o tempo, diminui a quantidade do medicamento, tendendo a zero. Aqui temos que as variáveis são tempo que é independente e concentração de ritalina que é dependente do tempo. Nosso domínio, como é representado pelo tempo são os números reais maiores ou iguais a zero e a imagem... bom a imagem tende a zero e começa no dez. Calculando o limite da função obtida, temos que tende a zero, conforme o gráfico mesmo. Porque meio elevado a um número cada vez maior é zero e vezes dez, dá zero.*
> *Lucas: Rita... calma aí! Como assim, você viu tudo isso?*
> *Rita:* [risos] *Escrevi aqui!*

Para tecer argumentações sobre o objeto matemático função exponencial, Rita leva em consideração as representações gráfica e algébrica produzidas por João, denotando características com relação ao crescimento, domínio e imagem da função. Para indicar domínio e imagem, Rita leva em consideração a situação em estudo – ingestão de um comprimido de ritalina –, além de considerar o limite da função quando o tempo aumenta. Os signos produzidos por Rita correspondem ao objeto matemático função exponencial e denotam aspectos cognitivos com relação a esse objeto com relação ao domínio e imagem da função, bem como seu caráter assintótico. Nesta abordagem, fica evidente o favorecimento da construção cognitiva por meio de uma "pluralidade de representações" destacada por D'Amore, Pinilla & Iori (2015). A representação gráfica contribui para tratar da assíntota da função antes mesmo de se utilizar o conceito de limite.

As argumentações matemáticas realizadas por Rita são registradas por ela, conforme consta na Figura 2 na qual também apresenta a validação do modelo matemático obtido.

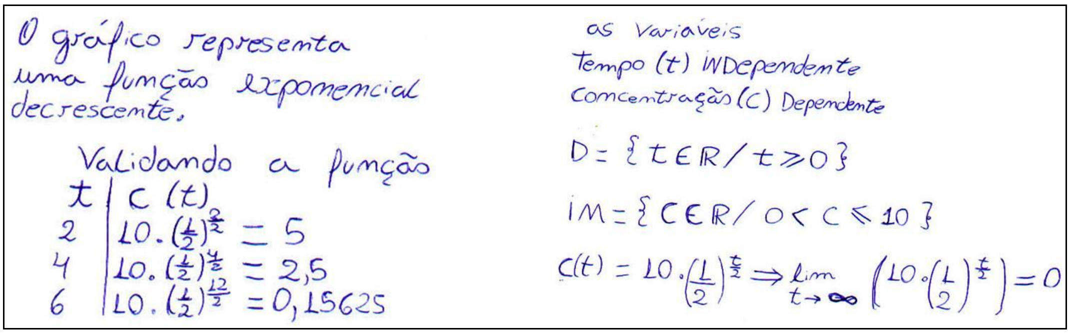

Figura 2 – Considerações sobre o modelo matemático com a ingestão de um comprimido
Fonte: Relatório de Rita.

O uso de diferentes representações auxiliou a abordagem matemática da situação e denota o que os alunos sabem sobre função exponencial e sobre a situação-problema – ingestão de um comprimido.

Esta abordagem realizada pelo grupo leva em consideração a ingestão de um comprimido de ritalina. A atividade proposta, por sua vez, sugere o estudo da concentração do medicamento no organismo de uma criança de seis anos que ingere um comprimido a cada 12 horas. Para isso, o grupo necessitou da interferência da professora, conforme transcrição a seguir:

> *João: Professora, a gente determinou a concentração de ritalina tomando um comprimido. E agora tomando um comprimido a cada doze horas? O que a gente precisa fazer?*
> *Professora: O que acontece quando a criança precisa ingerir um comprimido depois que tomou esse inicial?* [referindo-se à abordagem de ingestão de um comprimido]
> *Rita: Como assim?*
> *Professora: Vejam bem. Ingeriu esse comprimido inicial, depois de doze horas ingeriu outro. Havia ainda algum resquício do comprimido inicial?*
> *Rita: Sim, porque tende a zero a concentração! Não atinge zero.*
> *João: Toda vez que ela for tomar um comprimido ainda terá um pouco no corpo. Nossa... será que ela vai ficar... não. Tem a saturação!*
> *Professora: Sim, mas para que o medicamento faça efeito não podemos esperar ele praticamente desaparecer, é preciso ter uma periodicidade na sua ingestão.*
> *Rita: E se a gente fizesse um gráfico. Faz o gráfico aí João* (Figura 3). *Qual é a concentração de ritalina no organismo após doze horas?*
> *João: Espera... quando chega a doze horas, substituímos o tempo por doze e acrescentamos dez, do novo medicamento. Vamos fazendo isso de doze em doze. E depois vemos como generalizar. Se é que é possível.*

Os alunos entendem que, como o limite tende a zero, pode ser que esse não chegue a zero. De fato, $\lim_{t\to\infty} 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} = 0$ corresponde ao valor assintótico da função do modelo matemático denotado pela função do tipo exponencial $C(t) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$, para a ingestão de um comprimido. O que está em jogo nas argumentações é o comportamento do fenômeno ingestão de um comprimido a cada doze horas, em que seis meias-vida do medicamento se passaram, restando algum resquício no organismo, a saber, $C(12) = 10\left(\frac{1}{2}\right)^{6}$. Além disso, João considera o fato de que com o tempo a concentração de ritalina no organismo se mantém constante ao afirmar "*Tem a saturação!*". Para poderem analisar características do comportamento do fenômeno, Rita sugere que João faça uma representação gráfica (Figura 3).

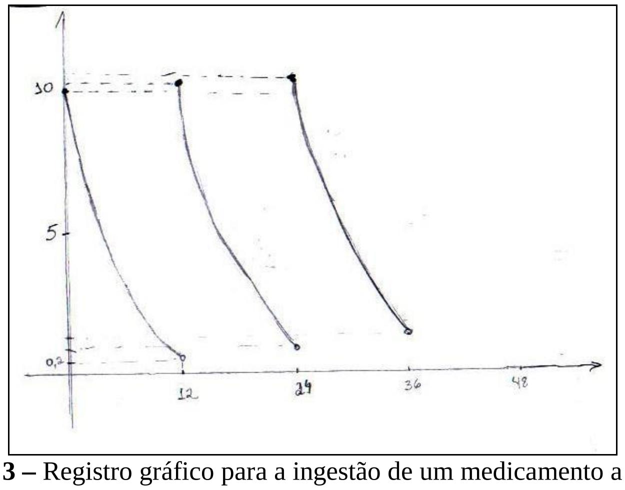

Figura 3 – Registro gráfico para a ingestão de um medicamento a cada 12 horas
Fonte: Relatório de João.

O signo gráfico, que representa a situação em estudo, coloca em debate se esse representa uma função e características dessa função são discutidas pelos integrantes do grupo, conforme transcrição a seguir:

João: Será que é uma função?
Rita: Bom... a cada valor de x existe um y, então é função. Aberto em doze aqui no final da primeira meia-vida e fechado com a ingestão do novo comprimido. Gráfico bem feito hein João. Você é top! [risos]
Lucas: É mesmo. Professora, veja se o gráfico aqui está certo!
[professora analisa o gráfico]
Professora: Muito bem. Agora vamos discutir aqui os limites laterais?
Rita: Sério mesmo professora? De qual ponto?
Professora: Por exemplo, quando t tende a doze!
João: Quando t tende a doze pela esquerda é [utilizando a calculadora para realizar os cálculos] *zero vírgula um cinco seis dois cinco e quando t tende a doze pela direita é esse resultado mais dez. Opa. Não existe o limite quando t tende a doze, pois os limites laterais são diferentes.*
Rita: Função não contínua em t igual a doze. Podemos ver isso no gráfico. Além do doze, o vinte quatro, o trinta e seis e de doze em doze vai ter descontinuidade.

Por meio do signo gráfico, os alunos analisam o comportamento do fenômeno em estudo e produzem signos que nos possibilitam inferir sobre aspectos cognitivos sobre o conceito de função: *a cada valor de x existe um y* (signo produzido por Rita), além de tratarem dos limites laterais – sugerido pela professora – quando o tempo tende a valores que coincidem com a ingestão de um novo comprimido, destacando a descontinuidade da função nesses valores: *Não existe o limite quando t tende a doze, pois os limites laterais são diferentes* (signo produzido por João). Por meio da representação gráfica, aspectos cognitivos para a situação e para o conceito de limites laterais foram evidenciados – *Função não contínua em t igual a doze. Podemos ver isso no gráfico* (signo produzido por Rita).

A expressão que representa a concentração do medicamento após a ingestão da segunda dose leva em consideração a quantidade remanescente de ritalina em t = 12 mais 10 mg do novo comprimido. Para determinar a concentração de medicamento no decorrer do tempo após a ingestão da segunda dose, os alunos afirmam que há a necessidade de utilizarem o decaimento da ritalina. Para generalizar a concentração de ritalina remanescente por períodos de 12 em 12 horas e obter uma expressão algébrica que representa a situação, os alunos fazem tratamentos matemáticos conforme Figura 4.

$$C_1 = 10\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + 10 = 10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)+1\right] = 10\cdot\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$C_2 = C_1\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + 10 = \left[10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\right]+10$$

$$= \left[10\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\right]+10$$

$$= 10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]$$

$$C_3 = C_2\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6 + 10$$

$$= \left[10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]\cdot\left(\tfrac{1}{2}\right)^6\right]+10$$

$$= 10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{18}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{12}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]$$

$$C_n = 10\left[\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6n}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6.(n-1)}+\left(\tfrac{1}{2}\right)^{6(n-2)}+\ldots+\left(\tfrac{1}{2}\right)^6+\left(\tfrac{1}{2}\right)^0\right]$$

Figura 4 – Tratamentos matemáticos para a situação da ingestão de um medicamento a cada doze horas
Fonte: Relatório de João.

Analisando esses tratamentos podemos evidenciar que os alunos dominam as representações algébricas de uma função exponencial como representada para a situação em estudo. No entanto, para darem continuidade ao desenvolvimento do modelo matemático da situação de ingestão de um comprimido a cada 12 horas, obtido por meio da expressão $C_n = 10\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{6n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{6(n-1)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{6(n-2)} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^{0}\right]$, os alunos necessitaram da intervenção da professora, conforme transcrição:

> *João: Professora chegamos até aqui e agora?*
> *Professora: Há alguma regularidade dentro aqui dos parênteses* [apontando para a soma obtida pelos alunos].
> *Rita: É uma soma com base meio e tem esse expoente seis vezes alguma coisa! Ai. O que há de regular nisso?*
> *Lucas: Parece soma de PG! É professora?*
> *Professora: O que é soma de PG?*
> *Lucas: Quando temos todos os elementos de uma progressão geométrica que segue uma sequência de valores onde um termo multiplicado por uma razão dá o outro termo. E aqui a gente tem, não é? Se pegarmos esse valor elevado a zero e multiplicar por meio elevado a seis, dá o penúltimo e assim por diante!*
> *Rita: Verdade Lucas. João procura a expressão da soma de PG. Professora sei que dá para deduzir, mas vamos agilizar aqui.*

De imediato os alunos não evidenciaram a presença da soma de uma Progressão Geométrica. No entanto, com a intervenção da professora, Rita evidenciou uma regularidade nos termos da soma que imediatamente foi identificada por Lucas. A partir dessa indicação, o grupo deduz o modelo matemático $C(t) = 10\left[\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} - 1}{-0{,}984}\right]$, em que *C(t)* representa a concentração de ritalina no organismo, em miligramas, em função do tempo, em horas, em que $t = 12\,n,\ n \in IN$ (Figura 5).

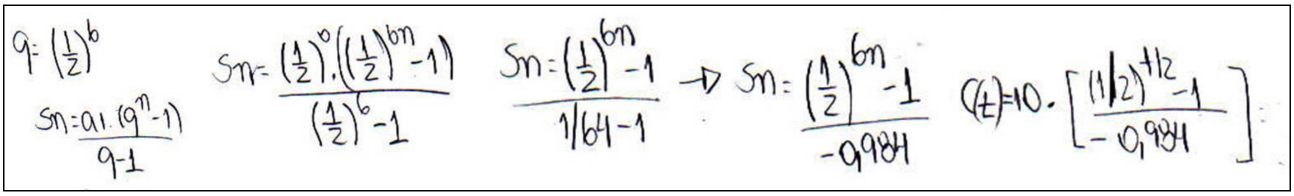

Figura 5 – Modelo matemático para a situação da ingestão de um comprimido a cada doze horas
Fonte: Relatório de João.

Diante do desenvolvimento do modelo matemático, os alunos tecem algumas considerações, conforme transcrição:

> *Rita: Muito difícil essas coisas!*
> *João: Eu achei mais trabalhoso do que difícil. Na verdade são coisas que a gente já estudou e a gente precisa relembrar. Mas é bem cansativo o desenvolvimento.*
> *Lucas: Mas será que realmente esse modelo é verdadeiro?*
> *Professora: O que podemos fazer para interpretá-lo?*
> *Rita: A gente pode fazer cálculos para alguns valores, múltiplos de doze!*
> *Lucas: Será que sempre vai aumentar o que fica após as doze horas?*
> *Rita: Ah... eu acho que vai chegar um momento que vai ser constante.*
> *João: Isso, vai ter a saturação. Quando os médicos alteram a dosagem do medicamento. É só a gente calcular o limite da função e ver o que acontece quando o número de doses tende ao infinito.*

Os alunos não querem somente generalizar, mas explorar um modelo que descreve a situação-problema em estudo. Uma representação matemática para a situação não é suficiente para esses alunos na atividade de modelagem, eles buscam uma interpretação para o problema, principalmente quando Lucas questiona se realmente o modelo condiz com a situação, mobilizando uma aceitação ou refutação para tal. Além disso, uma abordagem com relação à saturação do medicamento é considerada pelos alunos o que pode ser obtida por meio do cálculo do limite da função, em que $\lim_{t\to\infty} C(t) = 10{,}162$, conforme desenvolvimento realizado e apresentado na Figura 6.

$\lim_{t\to\infty} = \dfrac{10(1/2)^{t/12} - 10}{-0{,}984} = \dfrac{-10}{-0{,}984} \to \lim_{t\to\infty} C(t) = 10{,}162$ # saturação

Calculando-se o limite da função encontra-se a saturação do medicamento

• A saturação se dará no momento em que o medicamento praticamente não fará mais efeito no organismo.

Figura 6 – Cálculo da saturação do medicamento no organismo
Fonte: Relatório de João.

Com a obtenção da concentração saturada do medicamento, os alunos analisam que essa ocorre após 13 horas, ou seja, essa quantidade já é atingida com a ingestão do segundo comprimido, conforme consta na Figura 7.

$10{,}162 = 10\left[\dfrac{(1/2)^{t/12} - 1}{-0{,}984}\right]$

$1{,}0162 = \dfrac{(1/2)^{t/12} - 1}{-0{,}984}$

$-0{,}99 = (1/2)^{t/12} - 1$

$0{,}01 = (1/2)^{t/12}$

$\log 0{,}01 = t/12 \log 1/2$

$-2 = t/12\,(-0{,}3)$

$+6{,}66 = t/12$

$t = +13{,}33\,h$ # → horário da saturação

Figura 7 – Cálculo do momento em que a concentração atinge a saturação.
Fonte: Relatório de João.

No desenvolvimento da atividade de modelagem matemática, os alunos se envolveram com conceitos e procedimentos matemáticos relacionados a diferentes objetos matemáticos – função exponencial, limite, continuidade de função, soma de progressão geométrica –, no entanto, para além do uso e aplicação desses conceitos e procedimentos, estavam interessados em investigar e analisar a situação-problema não matemática – a concentração de ritalina quando ingerida de 12 em 12 horas por uma criança –, culminando na abordagem da saturação do medicamento no organismo e do momento em que essa ocorre.

Ponderações finais

As ações dos alunos frente ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática em aulas de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral foram traduzidas por meio de signos que representam o objeto. A análise com relação aos aspectos cognitivos que podem ser evidenciados nessas aulas nos permite inferir que os encaminhamentos da atividade são amparados nos conhecimentos acerca da situação e dos objetos matemáticos utilizados para encontrar uma solução para o problema proposto. Para isso, se fez necessário o uso de uma pluralidade de signos produzidos na forma escrita, falada ou gesticulada dos integrantes do grupo que, em alguns momentos, foram mediados pela intervenção da professora.

O que pudemos evidenciar é que esses signos têm relação, ora com a situação, ora com o problema em estudo, ora com os objetos matemáticos e ora com a resposta reconhecida como uma solução para o problema. Ou seja, os signos se configuram como meios pelos quais os alunos manifestam seus pensamentos e conhecimentos acerca da situação e da matemática que emerge do

Cálculo Diferencial e Integral enquanto buscam encontrar uma solução para o problema advindo da situação, possibilitando inferir sobre os aspectos cognitivos que permearam o desenvolvimento da atividade.

Diante das informações sobre a situação apresentada pela professora, os alunos, inicialmente, fazem algumas considerações sobre o que vão estudar no contexto matemático, visto que se encontram em aulas de Cálculo Diferencial e Integral, e usando diferentes representações – gráfico, tabela e expressão algébrica – decidem fazer uma abordagem considerando a situação da ingestão de um comprimido. Para tanto, identificam o objeto matemático *função exponencial* atrelado à situação que representa a análise da meia-vida de um elemento químico, no caso, o metilfenidato (ritalina). A partir das discussões que permearam o desenvolvimento dessa abordagem, os alunos, orientados pela professora, acionaram a produção de um conjunto de representações que viabilizassem a obtenção de um modelo matemático a partir do qual determinariam a saturação do medicamento no organismo e o tempo em que isso ocorre ao se ingerir um comprimido de 12 em 12 horas. Representações gráficas possibilitaram uma análise do comportamento do fenômeno em estudo e auxiliaram na identificação de um objeto matemático que pudesse representar a situação. Com isso, corroboramos com D'Amore, Pinilla & Iori (2015, p. 119), que afirmam que "para considerar que um objeto matemático foi construído cognitivamente, é necessário saber utilizar várias representações semióticas". A atividade de modelagem matemática desenvolvida permitiu que evidenciássemos o saber utilizar as diferentes representações do objeto por parte dos alunos, além de permitir que esses falassem sobre tais representações o que configurou um entendimento dos para os objetos matemáticos que foram estudados na disciplina.

Em termos gerais, podemos afirmar que nessa atividade, a relação entre signos e aspectos cognitivos dos alunos parece se configurar como uma rede em que signos são produzidos ou acionados pelo conhecimento e também geram novo conhecimento quer seja pela situação, quer seja pela matemática abordada. Nesta rede, podemos caracterizar uma estrutura que associa conhecimento matemático e conhecimento químico sobre a situação, o que possibilitou a obtenção de uma solução para o problema, além de uma intenção a mais por parte dos alunos quando sugerem calcular o limite da função para determinar a concentração saturada, bem como o tempo em que isso ocorre. Para além da abordagem matemática, foi estabelecida uma relação entre conteúdos estudados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral e aqueles que estudam em outras disciplinas do curso de Licenciatura em Química, promovendo uma articulação entre as mesmas, destacando o caráter indissociável dos conhecimentos construídos em diferentes contextos educacionais. De certa forma, atividades de modelagem matemática, pela sua caracterização conforme considerada nesse texto, promovem esta articulação de 'conhecimentos'. Analisar aspectos cognitivos por meio dos signos produzidos pelos alunos viabiliza perceber essas articulações.

Agradecimentos

Agradecemos ao CNPq, processo 457765/2014-3.

Referências

ALMEIDA, L. M. W., & DIAS, M. R. (2007). Modelagem Matemática em cursos de formação de professores. In J. BARBOSA, J., J. L. ARAÚJO, & A. D. CALDEIRA (Org.), *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira*: pesquisas e práticas educacionais (pp. 253-268). Recife: Biblioteca do Educador Matemático.

ALMEIDA, L. M. W., & FERRUZZI, E. C. (2009) Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. *Alexandria. Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 117-134.

ALMEIDA, L. M. W., & SILVA, K. A. P. (2012). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência & Educação*, 18(3), 623-642.

ALMEIDA, L. M. W., SILVA, K. A. P., & VERONEZ, M. R. D. (2015). *Sobre a geração e a interpretação de signos em atividades de modelagem matemática*. In: VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – GO, Pirenópolis: 2015. Anais... Pirenópolis: SBEM, p. 1-13.

ALMEIDA, L. W., SILVA, K. P., & VERTUAN, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica.* São Paulo: Contexto.

BARBOSA, J. C. (2001). *Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico*. In: XXIV Reunião Anual da ANPED – RJ, Caxambu: 2001. Anais... Caxambu: ANPED.

BASSANEZI, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto.

BLUM, W., & NISS, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 37-68.

BORROMEO FERRI, R. (2006) Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.

CALDEIRA, A. D. (2009). Modelagem Matemática: um outro olhar. Alexandria – Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2(2), 33-54.

COSTA, V. (2007). Representações sociais e semiótica: um território comum?. *Caligrama – Revista de Estudos e Pesquisas em Linguagem e Mídia*. 3(3), 1-11.

D'AMORE, B., PINILLA, M. I. F., & IORI, M. (2015). *Primeiros elementos de semiótica: sua presença e sua importância no processo de ensino-aprendizagem da matemática*. São Paulo: Editora da Livraria da Física.

GARNICA, A. V. M. (2004). História Oral e Educação Matemática. In M. C. Borba, & J. L. Araújo (Orgs.). *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 77-98). Belo Horizonte: Autêntica.

GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las Funciones Semioticas: un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Trabajo de investigación presentado para optar a la Cátedra de Universidad de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

KAISER, G., & SRIRAMAN, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302–310.

LEGÉ. J. (2005). Approaching minimal conditions for the introduction of mathematical modeling. *Teaching Mathematics and its Aplications*, 24(2-3), 90-96.

NISS, M. (1992). O papel das aplicações e da modelação na Matemática escolar. *Educação e Matemática*, 23(3).

NÖTH, W. (2008). *Panorama da semiótica: de Platão a Peirce*. 4. ed. São Paulo: Annablume.

PEIRCE, C. S. (2005). *Semiótica*. 2. reimpr. da 3. ed. de 2000. São Paulo: Perspectiva.

PEIRCE, C. S. (1972). *Semiótica e Filosofia: textos escolhidos*. São Paulo: Cultrix.

PEREIRA, R. S. G, & JUNIOR, G., S. (2011). A calibração de um micrômetro: uma experiência no ensino por meio da modelagem matemática. *Experiências em Ensino de Ciências*, 6(2), 124-132.

SANTAELLA, L. (2005). *Matrizes da linguagem e pensamento: sonora visual verbal: aplicações na hipermídia*. 3. ed. São Paulo: Iluminuras: FAPESP.

SANTAELLA, L. (2008). *O que é semiótica*. 27. reimpr. da 1. ed. São Paulo: Brasiliense.

SANTAELLA, L. (2007). *Semiótica aplicada*. São Paulo: Thomson Learning.

SILVEIRA, E., & CALDEIRA, A. D. (2010). *Modelagem na educação matemática: é possível fazer sem saber?* In: X Encontro Nacional de Educação Matemática Educação Matemática – BA, Salvador: 2010. Anais... Salvador: SBEM.

SOARES, M. R., JUNIOR, G., S., PILATTI, L. A., & SILVA, S. C. R. (2014). Modelagem matemática: aplicações das funções exponenciais em um curso de tecnologia. *Experiências em Ensino de Ciências*, 9(3), 59-69.